GAZDASÁG ÉS PÉNZÜGY • 7. ÉVF. 2. SZ. • 2020. JÚN. • DOI: 10.33926/GP.2020.2.3

A KLASSZIKUS KÖZGAZDASÁGTAN ÉS A VÉLETLEN

Szabó Imre[1]

A klasszikus elmélet abból a feltevésből indul ki, hogy az árak, a jövedelmek, a hasznossági függvény többé-kevésbé meghatározhatók, illetve a deriváltnak, a Lagrange-multiplikátornak a matematika eszközeivel a köztük fennálló kapcsolatok megismerhetők. Ezek az eszközök gyakorlatilag a bizonytalanság teljes kizárását jelentik. Végképpen nem veszik figyelembe azt a tényt, hogy a véletlen egyik pillanatról a másikra nemcsak egy megoldandó feladat feltételeit, hanem az egész feladatot felülírhatja.

JEL-kódok: D84, D85

Kulcsszavak: láthatatlan kéz, derivált, hasznossági függvény, haszonmaximalizálási feladat, határhaszon, Lagrange-multiplikátor, árnyékár

A közgazdaságtannak a determinisztikus világképen alapuló elmélete végül a 20. század második felében az általános egyensúlyelméletben csúcsosodott ki, ami máig a legfőbb, vagy legalábbis leglátványosabb eredménye (l. *Medvegyev*, 1978). Látnunk kell azonban, hogy a deriválhatóság a fizikai, főleg a mechanikus világkép következménye. A matematikai apparátus lényegében az optimumszámítás eszköztára, amely közvetlenül származik a klasszikus mechanikából. Nem véletlen, hogy a mikroökonómia fő eszköze, a *Lagrange*-multiplikátor-módszer a klasszikus mechanika egyik fő megalkotójának a nevét viseli. Az általános egyensúlyelmélet is valójában a mechanikus világkép alapján született egyensúlyi rendszer.

A klasszikus közgazdaságtan legfőbb hibája, hogy a véletlent és a kockázatokat figyelmen kívül hagyja, vagy legalábbis nem a súlyának megfelelően kezeli. Élesen szemben áll ezzel, hogy a pénzügyi piacokon jelen lévő kockázatokat mélyrehatóan vizsgálják a valószínűségszámítás eszközeivel, továbbá a kezelésére széleskörű eszköztár alakult ki (l. Medvegyev–*Száz*, 2010). A klasszikus elmélet például feltételezi, hogy a hasznossági függvény létezik, ismert és a külső hatásoktól független. Ha el is ismeri, hogy vannak véletlen kimenetelek, mindig felteszi, hogy azok valószínűsége ismert. Ebből a szempontból érdektelen, hogy ezek a valószínűségek milyen becslésből adódnak. Másképpen: nem az a legfontosabb kérdés, hogy

1 *Szabó Imre* egyetemi docens, Budapesti Corvinus Egyetem. E-mail: szaboim@uni-corvinus.hu.

ezek a valószínűségek statisztikailag megalapozottak-e, vagy szubjektív módon származnak. A fő hallgatólagos feltételezés, hogy a dolgok, legalábbis rövid távon, előreláthatóak. Nem lehet eléggé hangsúlyozni, hogy a bizonytalanság éppen az előrejelezhetőség tagadása.

Hogy a bizonytalanság mit jelent, azt a napokban mindenki a bőrén érezheti. Sajnos, kiváló példa mindezekre a koronavírus okozta szükséghelyzet. Egyik napról a másikra változtak meg a létfeltételek és az emberek céljai csaknem az egész világon. A vírushelyzet miatt szinte néhány órára sem látunk előre. Ugyancsak világos, hogy mit jelent a bizonytalanság és mit a véletlen. Nyilván nem arról van szó, hogy korlátlanul ismételhetjük a víruskísérletet és annak hatását a gazdaságra. A vírus által okozott gazdasági romlás valószínűségéről fogalmunk sincs.

Sok kritikát lehet tehát megfogalmazni a klasszikus közgazdaságtannal kapcsolatban. Mindezek ellenére ez több évszázad jelentős gondolkodói munkájának a kincsestára. Az alábbiakban ennek az erősen kritizálható, meglehetősen szűk érvényességi körben alkalmazható, ugyanakkor a közgazdasági gondolkodásra nagy hatást gyakorló klasszikus elméletnek a nagyon szép „épületébe" kísérelünk meg betekintést adni.

1. A LÁTHATATLAN KÉZ

A közgazdasági vizsgálódások során már a klasszikus közgazdászok, például *Adam Smith* is arra a felismerésre jutottak, hogy a gazdaság szereplői – bár csupán saját, egymástól különböző egyéni céljaikat követik, és nem törődnek a társadalom érdekével –, mindennek ellenére a *piac* által vezetve a közös célokat mégis a leghatékonyabban mozdítják elő. Ennek az összefüggésnek a felismerése igazi *néptételnek* nevezhető, hiszen tulajdonképpen Adam Smith előtt is többen megfogalmazták, és valószínűleg már abban az időben a közös tudás része lehetett. Mindenesetre ezt a titokzatos és kissé paradox állítást az 1776-ban publikált *Wealth of Nations* [A nemzetek gazdagsága] című munkájában írta le: *„Minden egyes ember arra törekszik, hogy a tőkéje a lehető legnagyobb értéket termelje. Általában nem akarja a közösségi érdeket előmozdítani, nem is tudja, mennyire mozdítja ezt elő. Csupán a saját biztonságára, saját nyereségére tör. Mindazonáltal egy láthatatlan kéz által vezetve előmozdítja azt is, ami nem volt szándékában. Saját érdekét követve a társadalmi érdeket gyakran sokkal hatékonyabban segíti, mint amikor kifejezetten azt akarja előmozdítani"* (Smith, 1776, IV. könyv, II. fejezet, IX. paragrafus).

Ezen a ponton egyébként már problémát okoz, hogy nem vesszük figyelembe a véletlent és a bizonytalanságot. *Keynes* fő hozzájárulása a kérdéskörhöz éppen az, hogy hangsúlyozza: a láthatatlan kéz bizonytalan körülmények között nehezebben működik. Érdemes megjegyezni ugyanakkor, hogy a láthatatlan kéz elmélete milyen óriási előrelépést jelentett. A mai gondolkodás a láthatatlan kéz kritikájára épül, de elfelejtjük, hogy maga az elmélet is forradalmi volt, komoly kritikai éllel.

A következő kérdés, hogy milyen módon fejti ki ezt a szabályozó hatását a piac. A válasz nyilvánvaló: az áruk árának az alakulása révén. Ha egy termék ára „túl magas", az a termelés növelését, ez pedig az ár csökkenését, míg ha „túl alacsony", az a termelés csökkenését, ami pedig az ár növelését vonja maga után. A kérdés tehát az, mit jelent, hogy túl alacsony, illetve túl magas egy termék ára, azaz hogyan alakul ki ez az ár.

Természetesen ez a fajta rugalmasság tiszta illúzió, különösen a mai nemzetközi szinten összehangolt termelési láncok esetén. Ugyanakkor tökéletesen megfigyelhető a pénzügyi piacok esetén, ahol lényegében a forgandó szerencséhez köthető várakozásokat adják, veszik (l. Száz, 2019).

Az árak kialakulásának kérdésére az első válasz a munkaérték-elmélet volt. Eszerint egy termék ára az értéke körül ingadozik. Ez az érték pedig a termék előállításához szükséges munkát jelenti. Ez az elképzelés mindenképpen megalapozottnak mondható, ugyanakkor a pontos megvalósulásának a részletes leírása számos ellentmondást hordozott magában, ami az elmélet használhatóságát nagyban rontotta, ezért idővel az árak kialakulásának más úton való megközelítését kezdték keresni. A határhaszon-elmélet szerint egy termék ára a határhasznával egyezik meg.

2. A MATEMATIKAI ANALÍZIS

A bővebb kifejtés előtt egy kitérőt kell tennünk, tulajdonképpen nem is a matematika, hanem a fizika felé. Az emberiséget évezredek óta érdekli a csillagos égbolt: miért van az, hogy a csillagok helye állandó, de néhány égitest egy furcsa ciklois alakú pályán „bolyong"? A modern válaszadás *Galilei* méréseivel kezdődött, aki megállapította, hogy a szabadon eső test által megtett út az idő négyzetével egyenesen arányos. A mozgás megértésének a kulcsát a sebesség fogalmának *Newton* általi bevezetése jelentette. Ennek a fogalomnak a bevezetését pedig a matematikában a differenciálhányados definiálása tette lehetővé, amely szerint egy test sebessége az útfüggvény deriváltja. A sebesség fogalmával lehetett aztán megmagyarázni, hogy az az esemény, hogy a Hold kering a Föld körül, azonos azzal, hogy egy alma leesik a fáról. Ez a felismerés alapvetően változtatta meg az emberiségnek a világról alkotott képét, és nem csupán a fizikai világképét, hanem a társadalmi világképét is. Ez a felvilágosodás alapja, ugyanis ha a földi és égitestekre ugyanazok a törvények érvényesek, akkor a jobbágyra és a királyra is ugyanazoknak a törvényeknek kell vonatkozniuk.

Ebbe a vonulatba illeszkedik Adam Smith társadalomfelfogása is. A láthatatlan kéz elmélete azt állítja ugyanis, hogy nem valamiféle uralkodói bölcsesség vagy jóindulat miatt működik a világ.

Nem lehet eléggé hangsúlyozni, hogy mindezek alapja a Newton, illetve *Leibniz* által egymástól függetlenül bevezetett derivált fogalma, ami a matematikának az egyik legfontosabb fejezetét, a matematikai analízist fejlesztette ki. A matematikai analízis azonban több évszázadon keresztül alakult ki a legnagyobb matematikusok, *Euler*, *Cauchy*, Lagrange, *Bolzano*, *Weierstrass*, *Riemann*, *Lebesgue* munkásságának köszönhetően a 17. század második felétől a 20. század elejéig.

Ez a markáns matematikai fejezet nemcsak a fizikai ismeretek fantasztikus fejlődését tette lehetővé, hanem szinte minden tudomány fejlődése szempontjából meghatározó volt, többek között a közgazdaságtan fejlődését is ez tette lehetővé.

3. A HATÁRHASZON-ELMÉLET

Míg a sebesség az útfüggvény deriváltja, addig – ennek az analógiájára – a határhaszon a hasznossági függvény deriváltja. Az igazi kérdés azonban az, hogy miért érdekes ez a fogalom, miért egyezik meg egy termék ára a határhasznával? A válasz közgazdasági szempontból alapvetően fontos, matematikai szempontból viszont az analízis mélyen fekvő területének – a feltételes szélsőérték-feladatoknak – az ismeretét igényli. Az alábbiakban némi formalizmusra is szükségünk van.
Tegyük fel, hogy a gazdaságban n féle terméket termelnek, illetve fogyasztanak.
Ezek szerint egy termékköteg:

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,.$$

Kiindulásként feltesszük: a fogyasztó rendelkezik azzal a képességgel, hogy képes „racionálisan" választani. Ezt úgy fogalmazzuk meg, hogy a fogyasztó rendelkezik egy $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tranzitív és teljes relációval, azaz preferenciarendezéssel. Ahhoz, hogy egy ilyen szélsőérték-feladatot az analízis eszközeivel tudjunk vizsgálni, a preferenciarelációt egy „preferenciaindikátor-függvénnyel", más néven „hasznossági függvénnyel" szokták helyettesíteni, azaz egy olyan $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvénnyel, ami reprezentálja az $\mathcal{R}$ preferenciarelációt, amin azt értjük, hogy egy $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ termékköteget pontosan akkor preferálunk egy $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ termékköteggel szemben, ha a hasznossági függvénye nem kisebb ebben a vektorban:

$$\mathbf{x}\mathcal{R}\mathbf{y} \Leftrightarrow \mathrm{u}(\mathbf{x}) \geq u(\mathbf{y}) \,.$$

A fogyasztó a fogyasztási javainak $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ vektorát úgy határozza meg, hogy adott

$\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_l) \in \mathbb{R}^l_+$ árak és $w \in \mathbb{R}_+$

jövedelem esetén maximalizálja az $\mathrm{u}(\mathbf{x})$ hasznosságát a $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \leq w$ költségvetési feltétel mellett. Ezek szerint a fogyasztó viselkedését a következő, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l_+$ árvektorral és $w \in \mathbb{R}_+$ jövedelemmel paraméterezett feltételes szélsőértékfeladatsereg írja le:

$$\begin{cases} \mathrm{u}(\mathbf{x}) \rightarrow \max \\ \langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle \leq w \end{cases} . \tag{1}$$

A feladat Lagrange-függvénye az az $\mathcal{L}\colon \mathbb{R}^l \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre $\forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^l, \lambda \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) \doteq \mathrm{u}(\mathbf{x}) - \lambda(\langle \mathbf{p}, \mathbf{x} \rangle - w) .$$

Attól függően, hogy a feltételben egyenlőséget, illetve egyenlőtlenséget teszünk fel, a Lagrange-, illetve a *Kuhn–Tucker*-multiplikátor tételek alkalmazhatók. Ezek alapján, ha egy $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^l$ vektor a feladat megoldása, akkor $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ Lagrange-multiplikátor, hogy $\forall\, i = 1, \dots, l$ esetén

$$\partial_i \mathrm{u}(\mathbf{x}_0) = \lambda \cdot p_i .$$

Feltéve, hogy csak két terméket vizsgálunk, ebből az összefüggésből adódik, hogy

$$-\frac{\partial_1 u(x_1^0, x_2^0)}{\partial_2 u(x_1^0, x_2^0)} = -\frac{p_1}{p_2} . \tag{2}$$

- Matematikai szempontból pedig a (2) összefüggés azt jelenti, – mint ahogy a Lagrange-féle multiplikátor-tétel szerint ez általában is teljesül –, hogy az u hasznossági függvénynek az $(x_1^0, x_2^0) \in \mathbb{R}^2_{++}$ optimális ponthoz tartozó $u^{-1}\big(u(x_1^0, x_2^0)\big) \subset \mathbb{R}^2_+$ szinthalmazát, közömbösségi görbéjét érinti a költségvetési egyenes. Ezek szerint az optimális pont meghatározását úgy szemléltethetjük, hogy a hasznossági függvény közömbösségi görbéit addig toljuk, amíg a költségvetési egyenes nem érinti.
- Közgazdasági szempontból a (2) összefüggés úgy interpretálható, hogy az (x_1^0, x_2^0) optimális pontban a két termék határhasznának az aránya megegyezik az áraik arányával. Továbbá, mivel a helyettesítési határarány megegyezik a határhasznok hányadosának az ellentettjével, ezért ebből az összefüggés-

ből következik a mikroökonómia egy sarkalatos törvénye, amely szerint az (x_1^0, x_2^0) optimális pontban a helyettesítési határarány megegyezik az árarány ellentettjével:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{p_1}{p_2}.$$

- Végül tegyük fel, hogy a második termék maga a pénz, ekkor a (2) összefüggés a következő egyenlőségre egyszerűsödik:

  $$\partial_i \mathrm{u}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{p}_i \,,$$

  ami pontosan azt a közismert tényt jelenti, hogy egy termék határhaszna megegyezik az árával. Ez azért érdekes igazán, mert sokan nem gondolnák – még a közgazdaságtannal foglalkozók sem –, hogy ennek az alapvető fogalomnak a bevezetése egyrészt milyen mély matematikai ismereteket igényel, ahogy azt sem, hogy ezen matematikai eszközök birtokában milyen egyszerű.

4. A LAGRANGE-MULTIPLIKÁTOR

A haszonmaximalizálási feladat Lagrange-függvényének a felírásakor tulajdonképpen beáraztuk a feltételt. Ennek a beárazásnak a vizsgálatához vezessük be a fogyasztó *indirekt hasznossági függvényét*, ami az (1) feladatsereg értékfüggvényeként értelmezünk, nevezetesen azt az $u^{\vee}\colon \mathbb{R}_+^l \to \mathbb{R}$ függvényt értjük alatta, amelyre $\mathbf{p} \in \mathbb{R}_+^l$ árvektor és $w \in \mathbb{R}_+$ jövedelem esetén

$$u^{\vee}(\mathbf{p}, w) \doteq \sup_{\langle \mathbf{p},\mathbf{x}\rangle \le w} \mathrm{u}(\mathbf{x}).$$

A burkológörbe-tétel szerint, amit ebben a speciális esetben *Roy*-azonosságnak neveznek, teljesül, hogy az indirekt hasznossági függvénynek a jövedelem szerinti parciális deriváltja – ami egyfajta határhaszonnak tekinthető – megegyezik a Lagrange-multiplikátorral:

$$\partial_2 u^{\vee}(\mathbf{p}, w) = \lambda.$$

Ennek az összefüggésnek az alapján a Lagrange-multiplikátor is valamilyen értelemben egy határhaszonnal egyezik meg, ezért szintén árnak tekinthető, így szokás árnyékárnak nevezni.

Még jobban megmagyarázza ezt a lineáris eset. Tekintsük az egyenlőtlenségekkel korlátozott feltételes szélsőérték-feladatnak azt a speciális esetét, amikor mind a célfüggvény, mind a feltételi függvények lineárisok, azaz a *lineáris programozási feladatot*:

$$\begin{cases} \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \to \max \\ \langle \mathbf{a_1}, \mathbf{x} \rangle \leq b_1, \dots, \langle \mathbf{a_m}, \mathbf{x} \rangle \leq b_m \end{cases}, \tag{3}$$

illetve a szokásos alakban

$$\begin{cases} \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle \to \max \\ \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \end{cases},$$

ahol

$$\mathbf{A} \doteq \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^{\mathbf{T}} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m^{\mathbf{T}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad \text{és} \quad \mathbf{b} \doteq \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m .$$

A (3) feladat Lagrange-függvénye az az $\mathcal{L}\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre $\forall\, \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ és $\forall\, \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^m$ esetén

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathcal{L}(\mathbf{x}, (y_1, \dots, y_n)) \doteq \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle - \textstyle\sum_{i=1}^{m} y_i \cdot (\langle \mathbf{a_i}, \mathbf{x} \rangle - b_i) = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbf{Ax} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{b} \rangle.$$

Tekintsük most a (3) feladatnak azt a változatát, amikor maximum helyett minimumot keresünk, a változója pedig

$$\begin{cases} \langle \mathbf{y}, \mathbf{b} \rangle \to \min \\ \mathbf{yA} \geq \mathbf{c} \end{cases}.$$

Ismert továbbá, hogy a fenti feladatok *komplett dualitási kapcsolatban* állnak egymással, amin a következőt értjük:

> *Ha a duális feladatpár egyik feladatának létezik optimális megoldása, akkor a másik feladatának is létezik optimális megoldása, valamint a két feladat értéke egyenlő.*

Ha a maximum feladatot egy nyereségoptimalizálási feladatnak tekintjük, akkor a duális feladatának a megoldásai a felhasznált termelési tényezők árait jelentik. Mivel a duális feladat változói az eredeti feladat Lagrange-multiplikátorai, ezért a Lagrange-multiplikátorok a termelési tényezők árnyékárainak tekinthetők.

5. ZÁRÓGONDOLATOK

A határhaszon-elmélet szerint az árak megismerhetők, kiszámolhatók, ami a gyakorlatban egyáltalán nem igaz. A derivált használata ugyanis a bizonytalanság teljes kizárását jelenti. Amikor a haszonmaximalizálási feladatot felírjuk, feltételezzük, hogy a jövedelem, az ár, sőt a hasznossági függvény is tökéletesen ismert, így a Lagrange-multiplikátor elvét felhasználva a keresletet tetszőleges tizedes pontossággal kiszámolhatjuk. Ez a feltételezés egyáltalán nem helytálló. Sőt, a kereslet és a kínálat egyensúlyával a legfőbb gond éppen az, hogy egy adott pillanatban még az sem ismert, hogy melyek a feltételek, amelyek felett maximalizálunk. Amit optimalizálunk, azonnal változhat. Az átlagos piaci szereplő preferenciái igen gyorsan megváltozhatnak. Egy optimista piaci várakozás egyetlen hír hatására menekülési pánikot eredményezhet. Egyik pillanatban a profitot maximalizáljuk, a másik percben a veszteséget minimalizáljuk. Továbbá az árak szabályozó szerepe is csökken. Nagy bizonytalanság esetén nem biztos, hogy a magas ár visszafogja a keresletet. Egy triviális példa erre a minapi vécépapír-mizéria. A bevásárlóközpontok jelentősen megemelték az árakat, de a polcok üresek maradtak. Később, amikor a kedélyek megnyugodtak, újra lehetett vécépapírt kapni. Ebben az esetben nem az árak szabályozzák a keresletet, hanem a félelmek és a várakozások mozgatják az árakat.

A legtöbb gazdasági folyamat egy folyamatosan beérkező hírfolyam függvényében alakul. Ez a hírfolyam alapjaiban rendítheti meg az összes olyan paramétert, amelyet a piaci szereplők korábban feltételeztek.

Ismert, hogy Newton 1720-ban áldozata lett a világtörténelem egyik legnagyobb részvénybuborékjának. Fennmaradt az erről való szarkasztikus megjegyzése: „*Ki tudom számítani az égitestek mozgását, de kiszámíthatatlan az emberi őrület.*"

HIVATKOZÁSOK

Ioffe, A. D. – Tikhomirov, V. M. – Makowski, K. (1979): *Theory of Extremal Problems.* Amsterdam, New York: North-Holland Pub. Co.

Medvegyev, P. (1978): Az általános egyensúlyelmélet Arrow-Debreu modellje (kézirat).

Medvegyev, P. – Száz, J. (2010): A meglepetések jellege a pénzügyi piacokon. Budapest: Nemzetközi Bankárképző Központ.

Smith, A. (1776): An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations. London: Strahan, W. és Cadell, T.

Száz, J. (2019): Kvantitatív pénzügyek. Budapest: Nemzetközi Bankárképző Központ.